



CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL



Graduado en Matemáticas e Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Facultad de Informática

TRABAJO FIN DE GRADO

Técnicas de interpolación para la reconstrucción del espectro de irradiancia en la superficie de Marte a partir de medidas hechas por fotodiodos

Autor: Mario Rodríguez Díaz

Director: Salvador Jiménez

MADRID, JUNIO DE 2014

Agradecimientos

Ha sido un verdadero placer trabajar en este proyecto de investigación de mi tutor, Salvador Jiménez, quién me ha ayudado en gran medida y me ha facilitado mucha información y tutorías para poder realizar con éxito este trabajo. Gracias.

Índice

RESUMEN	v
ABSTRACT	vi
1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. OBJETIVOS	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
2. DESARROLLO	6
2.1. CUADRATURA DE SIMPSON Y DEL TRAPECIO	6
2.1.1. Regla de Simpson	6
2.1.2. Regla del trapecio	7
2.2. MODELOS MATEMÁTICOS	8
2.2.1. Primer enfoque	9
2.2.2. Segundo enfoque	10
2.3. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV	12
3. ALTERNATIVAS	14
3.1. INTERPOLACIÓN MEDIANTE TRAZADORES CÚBICOS	14
3.1.1. Introducción a la interpolación mediante trazadores cúbicos [9]	14
3.1.2. Desarrollo de los trazadores cúbicos	15
3.2. SENSOR VIRTUAL PARA SISDREAMS	17
4. APLICACIÓN Y RESULTADOS	19
4.1. DATOS ESTIMADOS DE MARTE	19
4.2. INTENSIDADES PARA CADA Sonda	20
4.3. APLICACIÓN DE LOS DOS ENFOQUES	21
4.3.1. Resultados del primer enfoque	21
4.3.2. Resultados del segundo enfoque	26
4.3.3. Número de condicionamiento	27
4.4. OBSERVACIONES	28
4.4.1. Elección de fotodiodos para METSIS	28
4.4.2. Sensores ultravioleta para METSIS	30
4.5. TRAZADORES CÚBICOS NATURALES	31
4.6. SENSOR VIRTUAL PARA SISDREAMS	35
5. CONTRASTE DE LOS MÉTODOS Y CONCLUSIONES	37
5.1. CONTRASTE DE LOS MÉTODOS	37
5.2. CONCLUSIONES	37
REFERENCIAS	38

Índice de figuras

1.	fotodiodos (Imagen original de Wikipedia) [2]	1
2.	Sonda SISDREAMS	2
3.	Regla de Simpson [9]	7
4.	Regla del trapecio [9]	7
5.	Espectro de irradiancia solar en TOA	19
6.	Espectro de irradiancia solar en O3polos	19
7.	Espectro de irradiancia solar en Tau	19
8.	Top Of Atmosphere REMS 200-1200nm, enfoque 1	22
9.	Top Of Atmosphere REMS 200-370nm, enfoque 1	22
10.	Atmósfera con ozono REMS 200-1200nm, enfoque 1	22
11.	Atmósfera con ozono REMS 200-370nm, enfoque 1	22
12.	Atmósfera con polvo REMS 200-1200nm, enfoque 1	23
13.	Atmósfera con polvo REMS 200-370nm, enfoque 1	23
14.	Top Of Atmosphere METSIS, enfoque 1	23
15.	Atmósfera con ozono METSIS, enfoque 1	24
16.	Atmósfera con polvo METSIS, enfoque 1	24
17.	Top Of Atmosphere SISDREAMS, enfoque 1	25
18.	Atmósfera con ozono SISDREAMS, enfoque 1	25
19.	Atmósfera con polvo SISDREAMS, enfoque 1	25
20.	Top Of Atmosphere METSIS, enfoque 2	26
21.	Atmósfera con ozono METSIS, enfoque 2	26
22.	Atmósfera con polvo METSIS, enfoque 2	26
23.	Top Of Atmosphere METSIS, Todos los sensores	28
24.	Top Of Atmosphere METSIS, Sensores 1,2,4,6,7,8,9,11	29
25.	Top Of Atmosphere METSIS, Sensores 1,4,6,7,8,9,11	29
26.	Atmósfera con ozono METSIS, Sensores 2,3,4,5,10	30
27.	Atmósfera con polvo METSIS, Sensores 2,3,4,5,10	31
28.	Top Of Atmosphere REMS, trazadores cúbicos naturales	32
29.	Atmósfera con ozono REMS, trazadores cúbicos naturales	33
30.	Atmósfera con polvo REMS, trazadores cúbicos naturales	33
31.	Atmósfera con ozono METSIS, trazadores cúbicos naturales	33
32.	Atmósfera limpia METSIS, trazadores cúbicos naturales	34
33.	Atmósfera con ozono METSIS, trazadores cúbicos naturales	34
34.	Atmósfera con polvo METSIS, splines cúbicos naturales	34
35.	Top Of Atmosphere METSIS, splines cúbicos naturales	35
36.	Atmósfera con ozono METSIS, splines cúbicos naturales	35
37.	Top Of Atmosphere, Sensor Virtual	35
38.	Atmósfera con ozono, Sensor Virtual	35
39.	Atmósfera con polvo, Sensor Virtual	36

Índice de cuadros

1.	REMS	2
2.	METSIS	3
3.	SISDREAMS	3
4.	Intensidades para SISDREAMS, con Sensor Virtual	18
5.	Intensidades para REMS-MSL	20
6.	Intensidades para METSIS	20
7.	Intensidades para SISDREAMS	21
8.	Números de condicionamiento para las sondas	27

Resumen

Este trabajo fin de grado es un estudio sobre la reconstrucción del espectro de irradiancia solar en la superficie de Marte y de la radiación solar recibida en lo alto de la atmósfera. Se llevará a cabo a partir de los datos recogidos por “arrays” de fotodiodos, que se integran en unos sensores, y miden la intensidad de la radiación recibida del cuerpo negro (el Sol), en un rango de longitudes de onda del espectro electromagnético.

Para lograr esta reconstrucción, se ha necesitado desarrollar técnicas de interpolación y modelos matemáticos. Estos métodos los he implementado con el lenguaje de programación Matlab y me he ayudado de Maple para conseguir distintos resultados.

Estos procedimientos serán aplicados a tres configuraciones de sondas en las que cada una cuenta con un número determinado de fotodiodos.

El objetivo es reconstruir este espectro de irradiancia aproximándolo lo máximo posible a unos conjuntos de datos estimados, según modelos de transferencia radiativa, que me han sido proporcionados para el cuerpo negro y que miden la radiación solar recibida en la superficie y en lo alto de la atmósfera del Planeta rojo.

Este trabajo está basado en un proyecto de investigación que se está llevando a cabo desde hace varios años por un equipo de investigadores de varias universidades de Madrid, conjuntamente con el I.N.T.A. (Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial), entre los que se encuentra mi tutor.

Palabras clave: Reconstrucción, espectro de irradiancia solar, radiación solar, Planeta Marte, fotodiodos, cuerpo negro, espectro electromagnético, sondas.

Abstract

This final project is a study about the retrieval of the irradiance spectrum on the surface of Mars and solar radiation received at the top of the atmosphere. It will be made from data collected by arrays of photodiodes, which are integrated into sensors, measuring the intensity of the radiation received from the black body (the Sun), in a range of wavelengths of the electromagnetic spectrum.

To achieve this retrieval, it has needed to develop interpolation techniques and mathematical models. I have implemented these methods with the programming language Matlab and Maple have helped me to get different results.

These procedures will be applied to three configurations of probes in which each has a number of photodiodes.

The principal aim is to reconstruct the irradiance spectrum approximating it as much as possible to data sets estimated, as radiative transfer models, which I have been provided for the black body measuring solar radiation received at the surface and at the top of the atmosphere of Mars.

This work is based on a research project being carried out for several years by a team of researchers from some universities of Madrid together with I.N.T.A. (“Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial”), including my tutor.

Key words: Retrieval, Solar Irradiance Spectrum, Solar radiation, Planet Mars, photodiodes, electromagnetic spectrum, probes.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. INTRODUCCIÓN

Para conocer las características de la atmósfera y las condiciones en la superficie de Marte se han enviado sondas y otras están previstas enviarlas en un futuro. Estas sondas están formadas por un sensor de irradiancia solar y se compone por un conjunto de fotodiodos que miden la intensidad de la radiación solar recibida, en un determinado rango de longitudes de onda del espectro electromagnético.

Un fotodiodo (ver Figura 1) es un dispositivo que conduce una cantidad de corriente eléctrica proporcional a la cantidad de luz que lo incide (lo ilumina). El fotodiodo se puede utilizar como dispositivo detector de luz, pues convierte la luz en electricidad y esta variación de electricidad es la que se utiliza para informar que hubo un cambio en el nivel de iluminación sobre el fotodiodo [1].



Figura 1: fotodiodos (Imagen original de Wikipedia) [2]

Conocer la irradiancia solar en la superficie de Marte, es un paso muy importante para saber si la especie humana podría habitar en un futuro y para averiguar si se encuentran unas condiciones que permitan la posible existencia de vida, tal como la conocemos en la Tierra (básicamente bacterias bajo la superficie).

Las tres sondas cuya configuración he tenido que utilizar son las siguientes: REMS-MSL, METSIS y SISDREAMS (véase Figura 2).

La sonda REMS-MSL se encuentra en la actualidad en Marte, como parte del rover Opportunity de la NASA. Las otras dos está previsto que formen parte de la carga de futuras misiones espaciales de la ESA (European Space Agency) en colaboración con otras agencias espaciales.

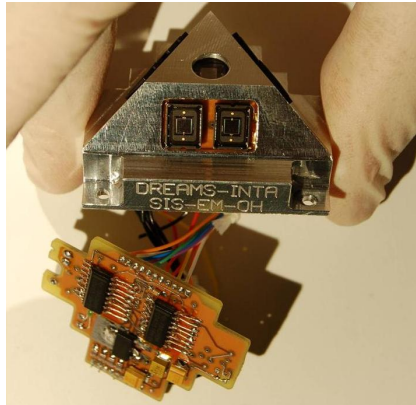


Figura 2: Sonda SISDREAMS

“Prototipo desarrollado en el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (I.N.T.A.) por el Área de Tecnología de Cargas Útiles”

En las siguientes tablas se muestran las tres configuraciones de sondas nombradas anteriormente con sus respectivos fotodiodos y rangos de longitudes de onda expresados en nanómetros (nm).

La sonda REMS-MSL (véase Cuadro 1) [3, 4, 5] cuenta con seis fotodiodos, cuyas longitudes de onda se distribuyen dentro del rango de la radiación ultravioleta que se encuentra entre los 15-400 nm del espectro electromagnético.

Fotodiodo	Sensor	Rango (nm)
1	UV Global	200-370
2	UV-A	320-370
3	UV-B	280-320
4	UV-C	220-280
5	Absorción de ozono	230-290
6	Rango complementario	300-350

Cuadro 1: REMS

Puede observarse cómo los fotodiodos 2, 3 y 4 no intersectan entre sí, es decir, cada uno cubre un rango distinto de la radiación ultravioleta. El resto coincide en algún valor del intervalo de longitudes de onda a excepción del primer fotodiodo que cubre el rango de todos.

METSIS (véase Cuadro 2) [6, 7] es la sonda que más fotodiodos tiene (está formado por once fotodiodos) y cubre un amplio rango del espectro electromagnético (200-1200 nm).

Fotodiodo	Sensor	Rango (nm)
1	Total de referencia de luminosidad	230-1200
2	UV-A	315-400
3	UV-B	280-315
4	Banda Hartley	200-310
5	Banda Huggins	300-345
6	Profundidad óptica de polvo	332-448
7	Profundidad óptica de polvo	592-608
8	Infrarrojo (IR)	700-1100
9	Visible	400-700
10	UV MRO	245-290
11	H_2O	930-950

Cuadro 2: METSIS

SISDREAMS (véase Cuadro 3) [8] solamente cuenta con tres fotodiodos: el UV-A, el IR y el total de luminosidad. Esto es debido a que tiene diversas limitaciones en su diseño.

Fotodiodo	Sensor	Rango (nm)
1	UV-A	315-400
2	Infrarrojo (IR)	700-1100
3	Total de referencia de luminosidad	220-1100

Cuadro 3: SISDREAMS

Se van a utilizar las configuraciones de estas tres sondas para reconstruir el espectro de irradiancia de la superficie de Marte aplicados a tres escenarios que se pueden dar en la composición de la atmósfera del planeta.

Los tres tipos de escenarios que nos podemos encontrar son los siguientes: radiación solar recibida en lo alto de la atmósfera (TOA: “Top Of Atmosphere”), atmósfera con polvo (Tau) y atmósfera con presencia de ozono (O3polos). Se cuenta con que Marte tiene en su composición un 95 % de dióxido de carbono, nitrógeno, argón y metano entre otros.

Necesitaba datos del espectro de irradiancia de Marte de estos tres tipos de escenarios para poder estimar de manera fiable que es lo que mide REMS-MSL, y sobretodo, que es lo que medirán las sondas METSIS y SISDREAMS que se enviarán en un futuro. Para lograrlo, me han sido proporcionados datos en lo alto de la atmósfera de Marte y dos estimaciones dadas por códigos de transferencia radiativa de los datos esperados, en el caso de que existiera polvo y ozono en la atmósfera.

Estos datos son tabulados y hay que utilizar diversos procedimientos matemáticos, para poder reconstruir el espectro de irradiancia de la radiación recibida, por el cuerpo negro en la superficie y en lo alto de la atmósfera y conseguir que se aproxime lo máximo posible al espectro de irradiancia de los tres escenarios.

Para poder representar este espectro, se necesita saber cuál es la intensidad total medida por los fotodiodos en un rango de longitudes de onda. Esto se puede conseguir integrando, pero, como los datos son tabulados (sólo conocemos un conjunto finito de valores de la función) he utilizado aproximaciones discretas de la integral como lo son los métodos de integración numérica de Simpson y de los trapecios.

El trabajo se estructura en cuatro grandes apartados. Se comienza con dos métodos de reconstrucción del espectro de irradiancia (el primero se basa en la aproximación mediante la integral y el segundo mediante la derivada). A partir de ahora estos dos métodos serán llamados enfoques.

En el tercer capítulo, se plantean alternativas para los posibles problemas encontrados en los dos primeros enfoques, como lo son los trazadores cúbicos naturales y el sensor virtual para SISDREAMS.

A continuación, una vez desarrollados estos procedimientos de aproximación, se aplican dichos modelos a los distintos escenarios para cada sonda, mostrando los resultados obtenidos.

Para cerrar este trabajo, en el quinto y último capítulo, he realizado un contraste de los métodos anteriormente nombrados y presento las conclusiones obtenidas durante la realización del trabajo.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

- El objetivo principal, es la reconstrucción del espectro de irradiancia en la superficie de Marte, a partir de las medidas efectuadas por unos sensores, compuestos por fotodiodos, que miden la intensidad de la radiación recibida en un rango de longitudes de onda, para conocer qué es lo que medirán “in situ” las sondas que planean enviarse en un futuro.

1.2.2. Objetivos específicos

- Desarrollar los métodos necesarios para la reconstrucción del espectro de irradiancia en la superficie y en lo alto de la atmósfera de Marte.

- Aplicar cada método desarrollado a los diferentes escenarios (alto de la atmósfera, atmósfera con ozono y atmósfera con polvo) para la configuración de cada sonda.
- Estudiar qué métodos son mejores para cada caso y qué fotodiodos de cada sonda utilizar para ellos.
- Encontrar soluciones y diferentes alternativas para problemas encontrados, a la hora de la aplicación de los métodos desarrollados.
- Hacer una comparativa y contraste de los métodos aplicados, para todas las combinaciones de cada sonda, con respecto a los distintos escenarios.

2. DESARROLLO

2.1. CUADRATURA DE SIMPSON Y DEL TRAPECIO

Como se ha explicado en el capítulo anterior, necesito la intensidad total que es medida a través del conjunto de fotodiodos que dispone cada sonda. Los datos que tengo de cada escenario (TOA, Tau y O3polos) son datos tabulados, por lo que no tengo el conjunto de todos los puntos de la función. Por esta razón, necesito aproximar dicha función, calculando la intensidad de los distintos rangos de longitudes de onda de cada fotodiodo, es decir, la integral en cada intervalo.

Para ello, he necesitado desarrollar dos métodos de integración numérica: La regla de Simpson y la regla del trapecio. Además, utilizar dos métodos permite tener una idea del error cometido.

Es necesario resaltar por qué he tenido que implementar dos métodos de obtención de la aproximación de la integral en lugar de uno solo. La regla de Simpson necesita tres puntos de la función, mientras que el método del trapecio necesita dos puntos. Esto quiere decir que en cada iteración, Simpson utiliza dos intervalos (desde el primer punto al segundo y del segundo al tercero) y en la regla del trapecio sólo necesitamos un intervalo en cada iteración.

En los diferentes rangos de longitudes de onda donde aplico estos métodos puede ocurrir que el número de intervalos sea par. Si es par, con aplicar repetidamente el método de Simpson llegaríamos a nuestro objetivo. En cambio, si el número de intervalos es impar, lo que se debería hacer, es aplicar la regla del trapecio al primer o último intervalo y en el resto utilizar Simpson.

2.1.1. Regla de Simpson

La regla de Simpson (ver Figura 3) se aplica sobre tres puntos y se utiliza para obtener la aproximación de la integral entre el primer y el último punto (también se podía haber hecho con la regla compuesta de Simpson). Se define como:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_1 - x_0}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{(x_1 - x_0)^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (2.1)$$

Debido a que el término de error, contiene la cuarta derivada de la función de f , al aplicar la regla de Simpson, a cualquier polinomio de grado tres o menor, nos dará resultados exactos. En otro caso será una aproximación de la función f [9].

Entonces, para calcular la integral en un rango determinado de longitudes de onda, se necesitará aplicar la regla de Simpson tantas veces como sea necesario. Es decir, si en una primera iteración he aplicado Simpson para los puntos x_0 , x_1 y x_2 , la siguiente iteración será para los puntos x_2 , x_3 y x_4 y así repetidamente hasta cubrir todo el rango.

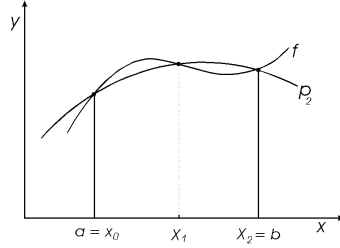


Figura 3: Regla de Simpson [9]

2.1.2. Regla del trapecio

La regla del trapecio (ver Figura 4) se aplica sobre dos puntos y, al igual que la cuadratura de Simpson, se utiliza para obtener la aproximación de la integral entre ambos puntos. Se describe con su término de error como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(2)}(\xi) \quad (2.2)$$

Se llama regla del trapecio debido a que cuando f es una función con valores positivos, aproximamos $\int_a^b f(x)dx$ por el área de un trapecio.

El término de error contiene la segunda derivada de la función f , entonces proporcionará un resultado exacto cuando se aplique a un polinomio de grado uno o menor (la derivada segunda se hace cero) [9].

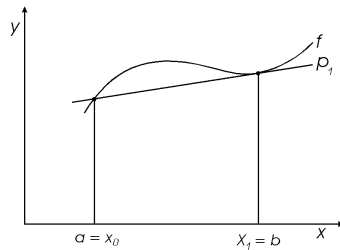


Figura 4: Regla del trapecio [9]

2.2. MODELOS MATEMÁTICOS

El objetivo principal asociado al uso de los fotodiodos, es reconstruir la dependencia de la intensidad, en función de las longitudes de onda, a través, de las medidas de la intensidad acumuladas en una serie de intervalos de longitudes de onda. Lo que se explica a continuación es común a ambos enfoques.

Como se ha dicho anteriormente, cada fotodiodo tiene un rango de longitudes de onda, desde λ_{min} hasta λ_{max} . La medida de este rango de longitud de onda será un valor llamado M_{ideal} y se modela mediante la siguiente integral:

$$M_{ideal} = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I(\lambda) d\lambda, \quad (2.3)$$

donde $I(\lambda)$ es la intensidad correspondiente a la longitud de onda λ . Los datos que me han sido proporcionados son datos tabulados de la función $I(\lambda)$ con valores equidistantes. Hay que encontrar una adecuada aproximación de la función $I(\lambda)$.

Supongamos que tenemos las medidas M_j (se obtienen con el método de Simpson y la regla del trapecio, véase ecuación (2.1) y (2.2)), de n ideales fotodiodos con rango $[\alpha_j, \beta_j]$ y $j = 1, \dots, n$. Entonces para el conjunto de fotodiodos de las diferentes sondas, los valores M_{ideal} se definen como:

$$M_j = \int_{\alpha_j}^{\beta_j} I(\lambda) d\lambda, j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Suponemos que $I(\lambda)$ existe y es integrable sobre los diferentes rangos y $F(\lambda)$ es una primitiva. Por Bolzano se tiene que:

$$M_j = F(\beta_j) - F(\alpha_j), j = 1, ..n \quad (2.5)$$

El primer enfoque se basa en una aproximación para la derivada y el segundo enfoque para la integral.

2.2.1. Primer enfoque

Suponemos que podemos aproximar $F(\lambda)$ en algún espacio vectorial (con dimensión infinita) con funciones base ortonormales $\phi_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, \infty$, tal que la proyección ortogonal de F en dicho espacio es una serie de Fourier de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(\lambda) \quad (2.6)$$

Suponemos que estas series convergen uniformemente a F y que una buena aproximación es obtenida, cuando nosotros truncamos las series tomando sólo los n primeros términos. Podemos reconstruir aproximadamente F como:

$$F(\lambda) \approx \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(\lambda) \quad (2.7)$$

siendo a_0 una constante arbitraria (por ejemplo 0) ya que al hacer la resta en la ecuación (2.5) el valor se anula.

Entonces, $I(\lambda)$ se puede aproximar de la siguiente manera:

$$I(\lambda) \approx \sum_{k=1}^n a_k \phi'_k(\lambda) = F'(\lambda), \quad (2.8)$$

donde $\phi'_k(\lambda)$ son las derivadas de las funciones base utilizadas. Para hallar la aproximación de $I(\lambda)$, necesitamos conocer los valores de los coeficientes a_k . Estos coeficientes se obtienen resolviendo (2.5) que corresponde al siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} M_1 &= a_1[\phi_1(\alpha_1) - \phi_1(\beta_1)] \\ M_2 &= a_2[\phi_2(\alpha_2) - \phi_2(\beta_2)] \\ \dots & \\ M_n &= a_n[\phi_n(\alpha_n) - \phi_n(\beta_n)] \end{cases}$$

Siendo n el número de fotodiodos que tiene cada sonda. Es un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas (a_1, \dots, a_n) .

El sistema de ecuaciones se puede resumir como:

$$M_j = \sum_{k=1}^n a_k [\phi_j(\alpha_j) - \phi_j(\beta_j)], \forall j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Podemos construir la matriz asociada a (2.9) como se muestra a continuación:

$$A_{jk} = \begin{pmatrix} \phi_1(\alpha_1) - \phi_1(\beta_1) & \phi_2(\alpha_1) - \phi_2(\beta_1) & \dots & \phi_n(\alpha_1) - \phi_n(\beta_1) \\ \phi_1(\alpha_2) - \phi_1(\beta_2) & \phi_2(\alpha_2) - \phi_2(\beta_2) & \dots & \phi_n(\alpha_2) - \phi_n(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\alpha_n) - \phi_1(\beta_n) & \phi_2(\alpha_n) - \phi_2(\beta_n) & \dots & \phi_n(\alpha_n) - \phi_n(\beta_n) \end{pmatrix}$$

Que es lo mismo que:

$$A_{jk} = \phi_k(\alpha(j) - \phi_k(\beta_j)), j, k = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

Y se calculan los coeficientes a_k :

$$a_k = A_{jk}^{-1} M_j \quad (2.11)$$

Sustituimos en (2.7) y obtenemos $F(\lambda)$ y al derivar esta función conseguimos la función aproximada $I(\lambda)$ dada en (2.8).

2.2.2. Segundo enfoque

Seguimos los mismos pasos que en el primer enfoque con la diferencia de que aquí aproximaremos $I(\lambda)$ por medio de la integral.

$$F(\lambda) \approx \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(\lambda) d\lambda \quad (2.12)$$

Entonces, $I(\lambda)$ se puede aproximar de la siguiente manera:

$$I(\lambda) \approx \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(\lambda) = F'(\lambda), \quad (2.13)$$

donde $\Phi_k(\lambda)$ es una primitiva de $\phi_k(\lambda)$ y $\phi_k(\lambda)$ que es la función base utilizada.

Para hallar la aproximación de $I(\lambda)$, tenemos que obtener los valores de los coeficientes c_k . Al igual que en el anterior enfoque, tenemos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas (c_0, \dots, c_{n-1}). Estos coeficientes se calculan resolviendo el sistema lineal de (2.3):

$$\begin{cases} M_1 &= a_1[\Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(\beta_1)] \\ M_2 &= a_2[\Phi_2(\alpha_2) - \Phi_2(\beta_2)] \\ \dots & \\ M_n &= a_n[\Phi_n(\alpha_n) - \Phi_n(\beta_n)] \end{cases}$$

Siendo n el número de fotodiodos que tiene cada sonda. El sistema de ecuaciones se resume de la siguiente forma:

$$M_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k [\Phi_j(\alpha_j) - \Phi_j(\beta_j)], \forall j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Construimos la matriz C_{jk} asociada a (2.14):

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(\beta_1) & \Phi_2(\alpha_1) - \Phi_2(\beta_1) & \dots & \Phi_n(\alpha_1) - \Phi_n(\beta_1) \\ \Phi_1(\alpha_2) - \Phi_1(\beta_2) & \Phi_2(\alpha_2) - \Phi_2(\beta_2) & \dots & \Phi_n(\alpha_2) - \Phi_n(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(\alpha_n) - \Phi_1(\beta_n) & \Phi_2(\alpha_n) - \Phi_2(\beta_n) & \dots & \Phi_n(\alpha_n) - \Phi_n(\beta_n) \end{pmatrix}$$

Se puede escribir de la siguiente forma:

$$C_{jk} = \Phi_k(\alpha(j) - \Phi_k(\beta_j)), j, k = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Calculamos los coeficientes c_k :

$$c_k = C_{jk}^{-1} M_j \quad (2.16)$$

Sustituimos en (2.12) y obtenemos $F(\lambda)$ y al derivar esta función tenemos la función aproximada $I(\lambda)$ dada en (2.13).

2.3. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Para los dos enfoques explicados anteriormente, para que (2.6) sea una serie de Fourier y (2.7) y (2.12) aproximaciones mejores y para poder derivar en (2.8), necesitamos funciones base ortonormales.

Para ello, he utilizado polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}$ que son ortogonales en $(-1, 1)$ con respecto a la función de peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Se le llama función de peso a la función integrable w en un intervalo I , siendo $w(x) \geq 0$, para todo x en I , pero $w(x) \neq 0$ en cualquier subintervalo de I [9].

He elegido polinomios de Chebyshev debido a que sirven para reducir al mínimo el error de aproximación. El polinomio de Chebyshev de grado n se obtiene a través de la siguiente definición recursiva:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (2.17)$$

Debido a que $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$, la relación de recurrencia implica que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n cuyo coeficiente principal es 2^{n-1} , para $n \geq 1$.

Para este trabajo he necesitado los 12 primeros polinomios de Chebyshev que son los siguientes:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

$$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$$

Se necesitan tantos polinomios de Chebyshev como fotodiodos tenga cada sonda. Es decir, para la sonda REMS-MSL necesitamos 6 polinomios de Chebyshev, para METSIS requerimos 11 y para SISDREAMS un total de 3.

En el primer enfoque, como el primer polinomio de Chebyshev es $T_0(x) = 1$ y al aplicar (2.5) la resta anula el primer polinomio (tendríamos la primera columna de ceros en la matriz A_{jk}), lo cuál no nos interesa, escogemos los polinomios a partir de $T_1(x)$. Esto no ocurre en el segundo enfoque, debido a que aplicamos la integral a cada polinomio de Chebyshev y al restar el primero de ellos no se anula.

Hay que tener en cuenta que los polinomios de Chebyshev son ortonormales en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, es necesario usar un cambio de variable $x \in [-1, 1]$ dado por $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Resolvemos el siguiente sistema para lograr la dependencia que se necesita:

$$\begin{cases} \alpha a + b &= -1 \\ \beta b + b &= 1 \end{cases}$$

y tenemos que $a = \frac{2}{\beta - \alpha}$ y $b = 1 - \beta\alpha$. Con esto ya tenemos los polinomios de Chebyshev en función de λ ($T_n(a\lambda + b)$) cumpliendo sus condiciones.

3. ALTERNATIVAS

Dado que para algunos escenarios no se obtendrán buenos resultados, es necesario encontrar otros procedimientos de interpolación, sobretodo, para la sonda SISDREAMS que con el primer y segundo enfoque sólo se podrá aproximar mediante una parábola por estar formado por tres fotodiodos (se obtiene un polinomio $I(\lambda)$ de grado 2).

3.1. INTERPOLACIÓN MEDIANTE TRAZADORES CÚBICOS

3.1.1. Introducción a la interpolación mediante trazadores cúbicos [9]

Dado un conjunto de $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$, podríamos construir con distintos métodos numéricos, un polinomio de grado n que pase por este conjunto de puntos. En cambio, los polinomios de alto grado tienden a oscilar frecuentemente.

Para solventar este problema, se podría utilizar aproximación polinómica fragmentaria. Este método consiste en dividir el intervalo en un conjunto de subintervalos, y en cada uno de ellos se realiza una aproximación polinómica de un grado adecuado (bajo grado).

La aproximación polinómica más simple es la interpolación lineal a trozos, que consiste en la unión de los puntos dados $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ con un segmento de recta. La aproximación mediante funciones lineales posee una desventaja de que en los extremos de los subintervalos no se tiene la seguridad de que haya diferenciabilidad.

Otro procedimiento consiste en utilizar un polinomio cúbico a trozos del tipo Hermite en cada uno de los subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ para obtener una función continuamente diferenciable en el intervalo $[x_0, x_n]$.

El problema de esta aproximación es que requiere conocer la derivada de la función que va a ser aproximada, lo cual muchas veces no es posible (en este trabajo no lo es, puesto que sólo contamos con datos tabulados para aproximar).

Se va a estudiar una aproximación polinómica a trozos que no necesita información sobre la derivada excepto en los extremos del intervalo $[x_0, x_n]$. El procedimiento más simple es el uso de funciones cuadráticas que permite conseguir un interpolante con derivada continua en $[x_0, x_n]$. Pero, tiene el problema a la hora de especificar las condiciones de la derivada del interpolante en los extremos x_0 y x_n .

Podemos solucionarlo, utilizando interpolación mediante trazadores cúbicos (splines). Consiste en construir un polinomio cúbico entre cada par de nodos consecutivos (cada subintervalo) y ofrece flexibilidad para garantizar que el interpolante no sea sólo diferenciable en $[x_0, x_n]$, sino que además tiene segunda derivada continua en $[x_0, x_n]$. Sin embargo, en la construcción no se asegura que las derivadas del interpolante coincidan con las de la función que queremos aproximar, en los nodos.

3.1.2. Desarrollo de los trazadores cúbicos

Por la teoría [9] dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ un interpolante de trazador cúbico S para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado por $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ $\forall j = 0, 1, \dots, n-1$.
2. $S(x_j) = f(x_j) \forall j = 0, 1, \dots, n$.
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}) \forall j = 0, 1, \dots, n-2$.
6. Se satisface una de las siguientes condiciones de frontera:
 - a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (Frontera libre o natural).
 - b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (Frontera sujeta).

Cuando se utilizan las condiciones de frontera libre o natural, el trazador recibe el nombre de trazador natural. Generalmente se logran aproximaciones más exactas con las condiciones de frontera sujeta debido a que contienen más información acerca de la función.

Sin embargo, para que se cumpla esta condición de frontera, necesitamos conocer los valores de la derivada en los extremos.

Para poder construir el trazador cúbico interpolante de la función f , aplicamos las condiciones de definición a los polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$$

Está claro que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, y aplicando la condición 3:

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \forall j = 0, 1, \dots, n-2$$

Denotamos $h_j = x_{j+1} - x_j, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$ y definimos $a_n = f(x_n)$, entonces tenemos la ecuación:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.1)$$

De forma análoga, definimos $b_n = S'(x_n)$ y se verifica que:

$$S'_j(x) = b_j(x - x_j) + 2c_j(x - x_j)^2 + 3d_j(x - x_j)^3, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$$

Entonces, claramente si $S'_j(x_j) = b_j, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$, al aplicar la condición 4, llegamos a:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

A continuación, definimos $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicamos la condición 5, obtenemos la siguiente ecuación:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

Despejamos d_j de (3.3) y sustituyendo en (3.1) y (3.2), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2(2c_j + c_{j+1})}{3}, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(2c_j + c_{j+1}) \quad (3.5)$$

Despejamos b_j en la ecuación (3.4):

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j(2c_j + c_{j+1})}{3}, \forall j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.6)$$

y entonces, con una reducción del índice, obtenemos:

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}(2c_{j-1} + c_j)}{3}, \forall j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación obtenido con el índice reducido en 1 de la ecuación (3.5), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\forall j = 1, \dots, n-1$:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j+1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{3h_{j-1}(a_j - a_{j-1})}{h_{j-1}} \quad (3.8)$$

Necesitamos $n + 1$ incógnitas $c_j, \forall j = 0, \dots, n$ que se determinan con las dos condiciones de frontera natural o frontera sujeta.

Las b_j se determinan utilizando la ecuación (3.6). Después, las d_j , se obtienen a partir de la ecuación (3.3). Una vez conseguidos estos valores, tenemos los polinomios cúbicos $S_j(x), \forall j = 0, \dots, n-1$.

3.2. SENSOR VIRTUAL PARA SISDREAMS

En los resultados de los procedimientos no se podrán conseguir buenas aproximaciones del espectro de irradiancia del cuerpo negro para SISDREAMS porque sólo está formado por tres sensores y la función $I(\lambda)$ obtenida es de grado 2. En consecuencia, el ajuste estaría dado por una parábola para los dos primeros enfoques. Tampoco se conseguirá con los trazadores cúbicos por la ausencia de fotodiodos.

Entonces, para lograr una reconstrucción aceptable del espectro, puedo inventarme un sensor que cubra el rango del espectro electromagnético que no cubren los otros tres (400-700nm). A este sensor le llamaremos sensor virtual.

Para conseguirlo, el valor de la integral para este sensor virtual deberá estar muy próximo al exacto. El exacto se calcula como hemos hecho anteriormente, con los métodos de Simpson y del trapecio.

Se puede obtener una aproximación decente del valor exacto, aplicando el segundo enfoque (que como ya se vio, era más correcto que el primero por el número de condicionamiento) y asignando al valor M_{ideal} , en el rango 400-700nm del sensor virtual, un valor α . El objetivo, es obtener este α y se obtiene al conseguir $I(\lambda)$ en función de este parámetro. Por lo tenue que sea la atmósfera de Marte, se espera que la radiación solar recibida por debajo de la $\lambda = 200nm$ (la más energética) no pase, por lo que tomamos que el sensor mida cero para los 200nm [4].

En la siguiente tabla se muestran los valores de la integral (M_{ideal}) de los rangos de longitudes de onda de los sensores de cada sonda, incluyendo el M_{ideal} exacto del sensor virtual y el valor obtenido con este procedimiento:

Sonda SISDREAMS	Intensidades		
Fotodiodo, sensor y rango(nm)	TOA	O3polos	Tau
(1) UV-A: 315-400	51.7391	51.2965	23.6537
(2) Infrarrojo (IR): 700-1100	178.3618	178.2685	128.5098
(3) Total de referencia de luminosidad: 220-1100	490.4949	479.4597	309.6764
Sensor Virtual exacto: 400-700	235.867	235.3431	147.9412
Sensor virtual con el procedimiento: 400-700	230.2833	219.6408	145.4897113

Cuadro 4: Intensidades para SISDREAMS, con Sensor Virtual

Se puede observar que los valores de la integral obtenidos para el sensor virtual en cada sonda son muy parecidos. Y ahora lo que hay que comprobar es si, una vez que tenemos cuatro sensores y podemos aproximar mediante un polinomio de grado 3, puede ajustarse razonablemente bien.

4. APLICACIÓN Y RESULTADOS

4.1. DATOS ESTIMADOS DE MARTE

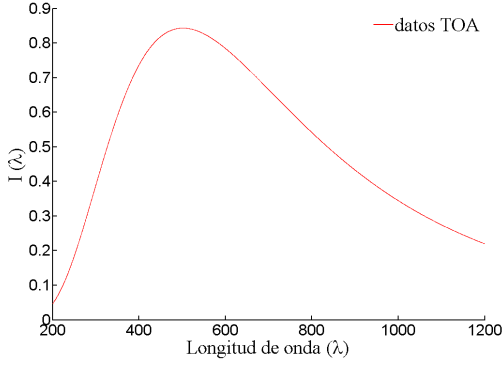


Figura 5: Espectro de irradiancia solar en TOA

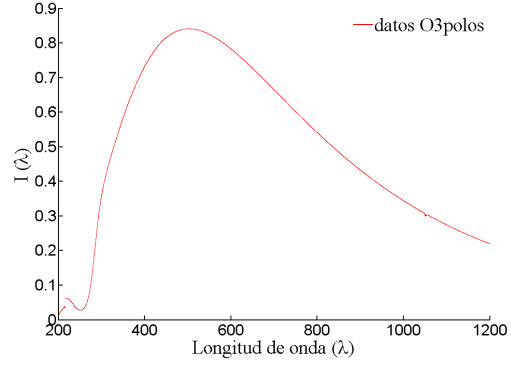


Figura 6: Espectro de irradiancia solar en O3polos

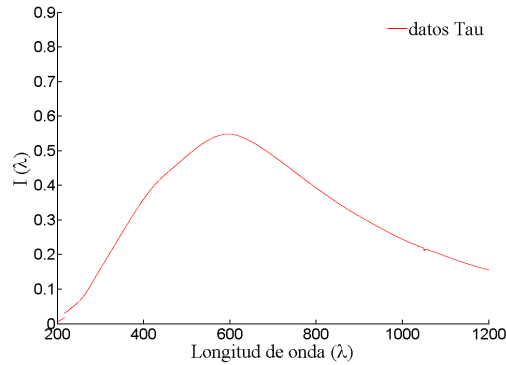


Figura 7: Espectro de irradiancia solar en Tau

Estas tres imágenes corresponden a los diferentes escenarios nombrados en el primer capítulo. La primera de ellas es TOA (Top Of Atmosphere), es decir, que los datos han sido tomados en lo alto de la atmósfera de Marte. Las dos siguientes, O3polos (Atmósfera con ozono) y Tau (Atmósfera con polvo), son estimaciones de los datos que nos podríamos encontrar en la superficie del Planeta suponiendo que la atmósfera contiene partículas de ozono y polvo. Estos datos que he recibido [10] son tabulados (unos 10,000 aproximadamente) y representan la radiación solar emitida por el cuerpo negro, entre un rango del espectro electromagnético (entre los 200 y los 1200nm exactamente) en cada uno de los casos.

Hay que intentar reconstruir estas imágenes (espectros de irradiancia solar) para las sondas REMS-MSL, METSIS y SISDREAMS.

4.2. INTENSIDADES PARA CADA SONDA

Una vez implementadas la regla de Simpson y la regla del trapecio, se puede obtener el valor de la intensidad (M_{ideal}) que mide idealmente cada uno de los fotodiodos (en sus respectivos rangos de longitudes de onda) en las tres sondas, aplicados a los diferentes escenarios.

Las imágenes del espectro de irradiancia solar de TOA (véase Figura 5) y atmósfera con ozono (véase Figura 6) son prácticamente iguales, excepto en una zona del ultravioleta.

Con respecto a la Figura 7, se observa que el espectro se encuentra por debajo de las otras dos debido a la presencia de polvo. Entonces, los valores M_{ideal} para la atmósfera con polvo se encontrarán por debajo de ambos.

En las siguientes tablas se muestran las intensidades obtenidas para cada uno de los escenarios aplicando el método de Simpson y del trapecio:

Sonda REMS-MSL	Intensidad en atmósfera		
Fotodiodo, sensor y rango(nm)	TOA	O3polos	Tau
(1) UV Global: 200-370	56.6378	45.7059	23.5372
(2) UV-A: 320-370	28.4629	28.1873	12.6676
(3) UV-B: 280-320	15.5524	13.6329	6.4031
(4) UV-C: 220-280	11.2897	3.1922	4.1499
(5) Absorción de ozono: 230-290	13.5059	4.7189	5.0456
(6) Rango complementario: 300-350	24.6162	24.1538	10.5960

Cuadro 5: Intensidades para REMS-MSL

Sonda METSIS	Intensidad en atmósfera		
Fotodiodo, sensor y rango(nm)	TOA	O3polos	Tau
(1) Total de referencia de luminosidad:230-1200	514.0824	503.4901	326.7378
(2) UV-A: 315-400	51.7391	51.2965	23.6537
(3) UV-B: 280-315	13.2371	11.3593	5.4219
(4) Banda Hartley: 200-310	23.6489	13.0874	8.9587
(5) Banda Huggins: 300-345	21.7132	21.2771	9.3025
(6) Profundidad óptica de polvo: 332-448	12.9128	12.8673	6.7334
(7) Profundidad óptica de polvo: 592-608	12.5513	12.5284	8.7742
(8) Infrarrojo (IR): 700-1100	178.3618	178.2685	128.5098
(9) Visible: 400-700	235.8672	235.3431	147.9412
(10) UV MRO: 245-290	11.3904	4.1129	4.2717
(11) H_2O : 930-950	7.9058	7.9044	5.6600

Cuadro 6: Intensidades para METSIS

Sonda SISDREAMS	Intensidad en atmósfera		
Fotodiodo, sensor y rango(nm)	TOA	O3polos	Tau
(1) UV-A: 315-400	51.7391	51.2965	23.6537
(2) Infrarrojo (IR): 700-1100	178.3618	178.2685	128.5098
(3) Total de referencia de luminosidad: 220-1100	490.4949	479.4597	309.6764

Cuadro 7: Intensidades para SISDREAMS

Se puede apreciar entre TOA y atmósfera con ozono que hay un rango de la radiación ultravioleta en el que los valores de sus integrales son muy diferentes para las distintas sondas. Para REMS-MSL (Cuadro 4) ese rango se encuentra, aproximadamente, entre los 200 y 290nm y corresponden a los sensores 1, 4 y 5 (este último es absorción de ozono). Para METSIS (observar Cuadro 5) se corresponderán los fotodiodos 4 y 10 y la sonda SISDREAMS (Cuadro 6) no cuenta con muchos sensores de la radiación ultravioleta, por lo que los valores de la intensidad de sus fotodiodos serán prácticamente iguales.

Como se ha comentado anteriormente, se ha podido comprobar como en la atmósfera con polvo, los valores de las integrales, M_{ideal} , se encuentran por debajo de los otros escenarios.

4.3. APLICACIÓN DE LOS DOS ENFOQUES

4.3.1. Resultados del primer enfoque

Estos dos primeros métodos (enfoques) de aproximación hacen exactamente lo mismo, sólo que en este primero se obtiene $I(\lambda)$ derivando en $F(\lambda)$ y en el segundo enfoque a través de la integral en $F(\lambda)$ para las funciones base utilizadas. Pero no se consigue la misma función $I(\lambda)$ y esto es debido a los errores que se producen en la aproximación.

$I(\lambda)$ es un polinomio que será evaluado entre el valor mínimo y máximo de longitud de onda en el que se muestre la radiación del cuerpo negro.

Comenzaré representando los resultados obtenidos en la sonda REMS-MSL, ya que, como se encuentra actualmente en Marte, se obtienen muy buenas aproximaciones del cuerpo negro.

En la Figura 8, se puede observar que para el escenario “Top Of Atmosphere”, para REMS-MSL, se adapta perfectamente a la radiación del cuerpo negro. En lo alto de la atmósfera de Marte no habrá interferencias de polvo, ozono u otras partículas y los datos de radiación que llegan del cuerpo negro no son alterados prácticamente.

Por ello, se conseguirán buenos resultados para este escenario en la mayoría de las pruebas.

La Figura 9, muestra la misma imagen anterior pero entre los $200 - 370nm$ que es el rango donde se encuentran todos los fotodiodos de la sonda REMS-MSL, que es la radiación ultravioleta.

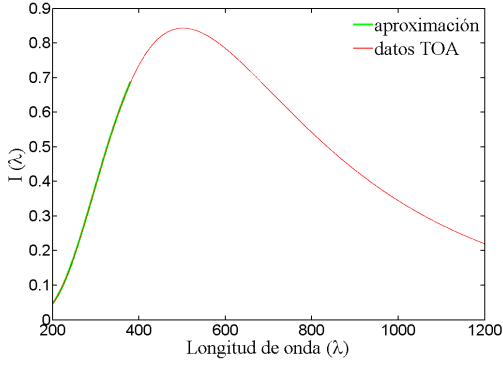


Figura 8: Top Of Atmosphere REMS 200-1200nm, enfoque 1

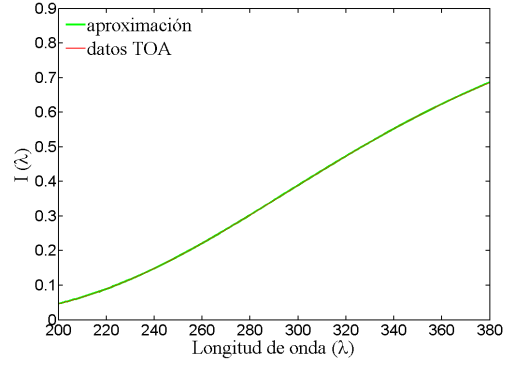


Figura 9: Top Of Atmosphere REMS 200-370nm, enfoque 1

En la Figura 10, se muestra la reconstrucción generada en el caso de que las medidas de radiación solar fueran tomadas en la superficie de Marte y su atmósfera contara con partículas de ozono.

Parece que la aproximación es muy buena, excepto al principio del espectro, ya que hay un salto en los datos tomados. Para verlo con mayor claridad he creado otro gráfico (véase Figura 11) como en el escenario anterior. En esta imagen se observa un ajuste bastante aceptable, aunque no tanto como en lo alto de la atmósfera.

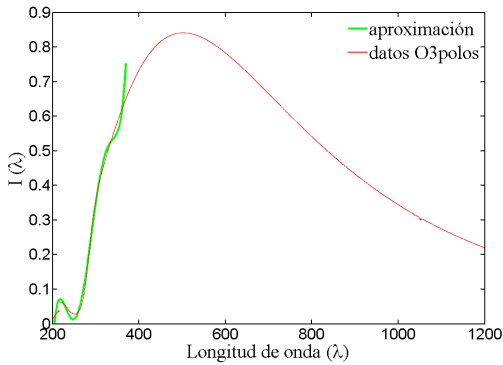


Figura 10: Atmósfera con ozono REMS 200-1200nm, enfoque 1

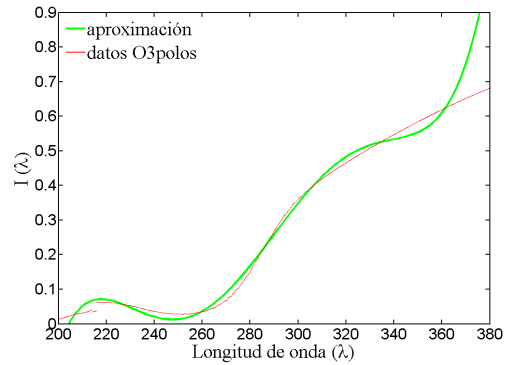


Figura 11: Atmósfera con ozono REMS 200-370nm, enfoque 1

Al igual que ocurre en la atmósfera con ozono, en la curva del cuerpo negro de atmósfera con polvo, también existe un pequeño salto en la primera parte del rango ultravioleta representado. A parte de esto, el polinomio $I(\lambda)$ se aproxima al espectro de irradiancia del cuerpo negro (véase Figura 12 y Figura 13).

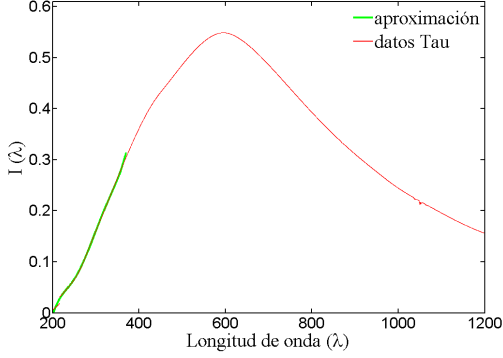


Figura 12: Atmósfera con polvo REMS 200-1200nm, enfoque 1

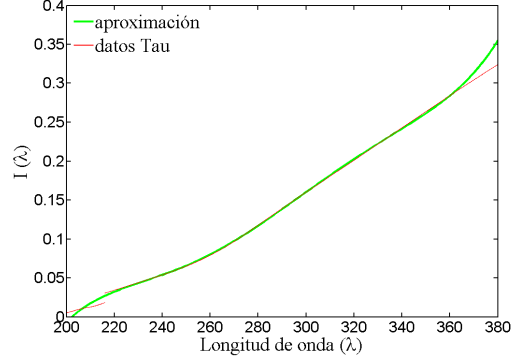


Figura 13: Atmósfera con polvo REMS 200-370nm, enfoque 1

Como se ha comprobado con estas imágenes, con este primer enfoque se puede conseguir una aproximación casi exacta de lo que mide la sonda REMS-MSL en Marte.

Una vez estudiado la sonda REMS-MSL, interesa saber qué ocurre con METSIS y SISDREAMS. Estas dos sondas serán enviadas en un futuro a Marte y se necesita conocer que es lo que medirán en lo alto de la atmósfera o en la superficie.

METSIS cuenta con 11 sensores, pero para aproximar con este enfoque, se han utilizado todos los fotodiodos, excepto el número 3 (UV-B), el 5 (Banda Huggins) y el 10 (UV MRO). Al final de este capítulo, en “Elección de fotodiodos en METSIS” se explicará por qué se han descartado estos tres sensores. En la siguiente imagen (véase Figura 14), se representa la aproximación obtenida en METSIS para la radiación obtenida en lo alto de la atmósfera. Se puede observar que se ajusta muy bien.

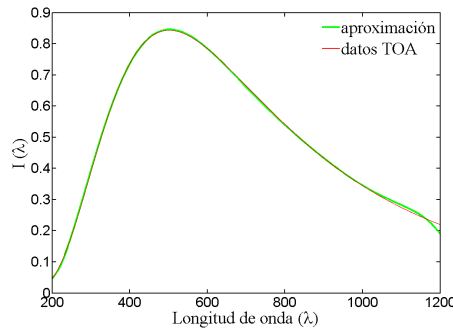


Figura 14: Top Of Atmosphere METSIS, enfoque 1

Al reconstruir el espectro de irradiancia solar en la superficie de Marte cuando existe atmósfera con ozono (véase Figura 15), se llega a la conclusión de que este enfoque logra una muy buena aproximación de los datos obtenidos para este escenario, excepto para los rangos $200 - 300nm$ y $1100 - 1200nm$.

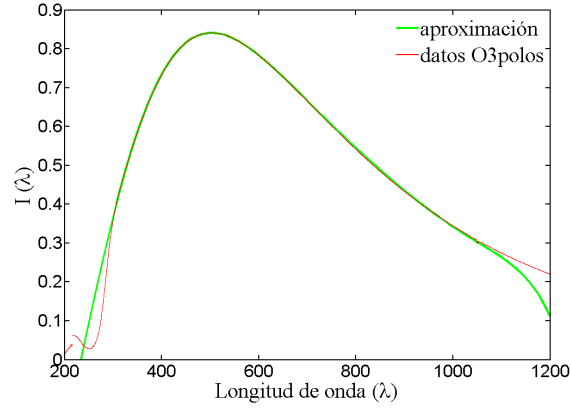


Figura 15: Atmósfera con ozono METSIS, enfoque 1

El último posible caso que falta por estudiar para METSIS, es el de atmósfera con polvo (véase Figura 16). Se consigue una aproximación muy pobre con respecto a la forma general de la radiación del cuerpo negro.

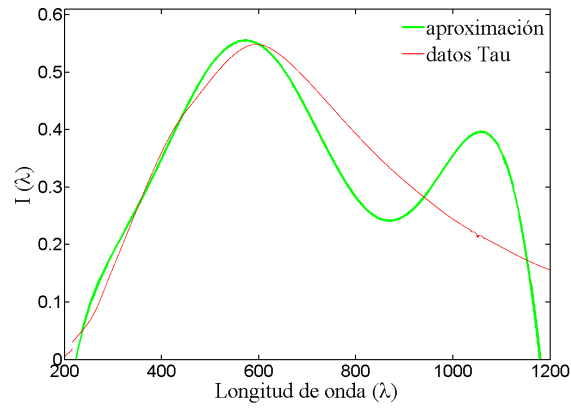


Figura 16: Atmósfera con polvo METSIS, enfoque 1

La sonda SISDREAMS cuenta únicamente con tres sensores, es decir, cuando intentemos aproximar con este enfoque, al aplicar (2.8), tendremos un polinomio $I(\lambda)$ de grado 2. Con un polinomio de grado 2, sólo se podría aproximar con una parábola. Es lógico que no se van a obtener buenos resultados.

En la Figura 17 y en la Figura 18, se muestran la reconstrucción del espectro de irradiancia solar obtenido en lo alto de la atmósfera y atmósfera con presencia de ozono, respectivamente.

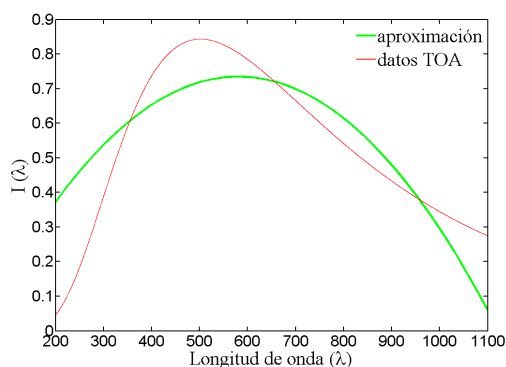


Figura 17: Top Of Atmosphere SIS-DREAMS, enfoque 1

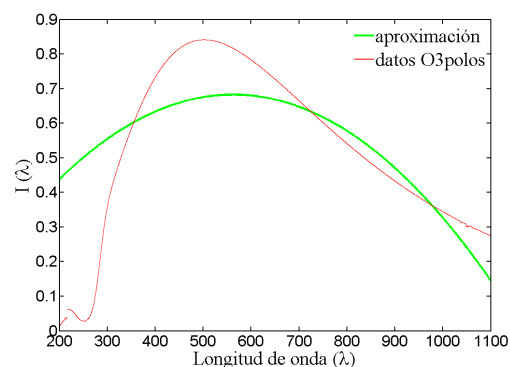


Figura 18: Atmósfera con ozono SIS-DREAMS, enfoque 1

En la siguiente imagen (véase Figura 19), curiosamente se puede observar una buena aproximación entre los $300 - 600\text{nm}$, pero, en el resto de las longitudes de onda se obtiene lo esperado sabiendo que es una parábola.

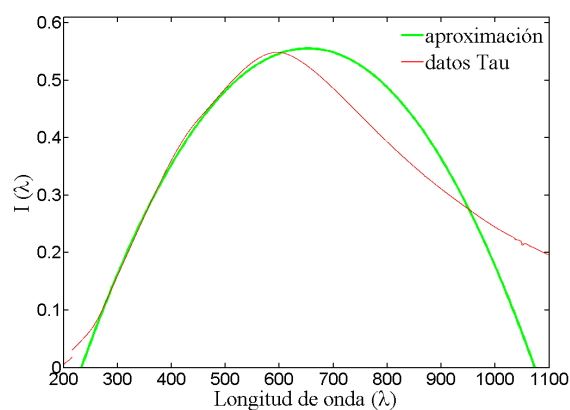


Figura 19: Atmósfera con polvo SISDREAMS, enfoque 1

4.3.2. Resultados del segundo enfoque

Como se ha comentado anteriormente, este método de aproximación, se podía hacer a través de dos enfoques distintos para llegar al mismo polinomio $I(\lambda)$. El primer enfoque a partir de la derivada de $F(\lambda)$ y este segundo enfoque por la integral en $F(\lambda)$.

Pero a pesar de ello, estos polinomios distan en muy poco y obviamente tienen el mismo grado. Llegan a aproximaciones del cuerpo negro muy similares entre ellos, pero no iguales. Al conseguir las gráficas de este segundo enfoque no se aprecia diferencia alguna entre el enfoque primero y el segundo enfoque.

No se van a mostrar todas las imágenes obtenidas con este método debido a la semejanza con respecto al primero. A continuación, sólo se representan las imágenes de la sonda METSIS (Figura 20, Figura 21 y Figura 22) que son prácticamente iguales a las imágenes: Figura 14, Figura 15 y Figura 16.

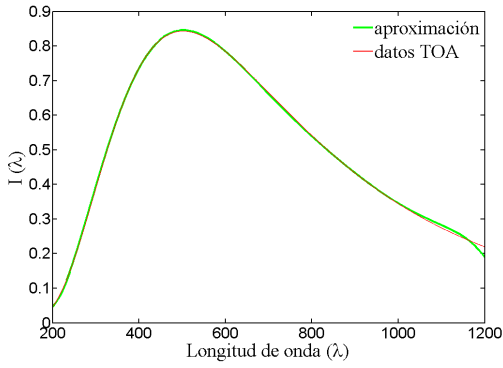


Figura 20: Top Of Atmosphere METSIS, enfoque 2

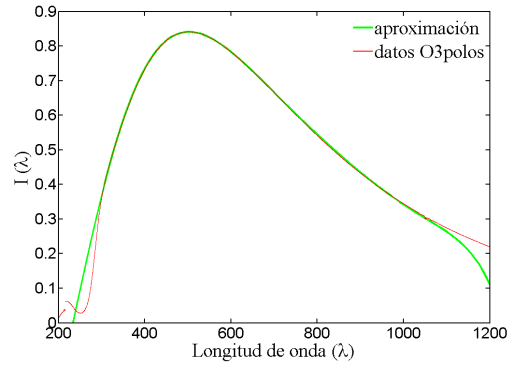


Figura 21: Atmósfera con ozono METSIS, enfoque 2

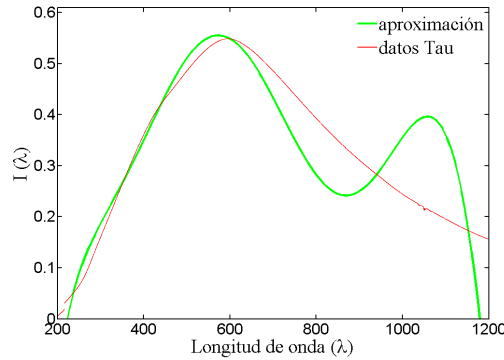


Figura 22: Atmósfera con polvo METSIS, enfoque 2

4.3.3. Número de condicionamiento

Después de haber visto como existe una diferencia entre ambos enfoques, hay que comprobar cuál de ellos es mejor y con el que se seguirá trabajando. Como ayuda para discriminar, se utilizará el número de condicionamiento de una matriz.

En cada uno de los enfoques se han utilizado dos matrices, la matriz A_{jk} (véase fórmula 2.10) y la matriz C_{jk} (véase fórmula 2.15). Como es en estas matrices donde está el problema de que los polinomios $I(\lambda)$ no sean iguales, se va a hallar el número de condición de cada una de las matrices.

Para poderse calcular el número de condición, las matrices han de ser invertibles y $\| \cdot \|$ es una norma matricial subordinada (puede utilizarse cualquier norma matricial). La norma que se ha utilizado es la norma 2 o norma euclídea.

Entonces, se define número de condicionamiento de una matriz A invertible como:

$$Cond(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$$

Tiene las siguientes propiedades:

- $Cond(A) \geq 1$
- $Cond(A) = Cond(A^{-1})$
- $Cond(\lambda A) = Cond(A) \forall \lambda \in K - \{0\}$

Al calcular el número de condicionamiento de las tres matrices utilizadas en un escenario (por ejemplo, atmósfera con ozono) para cada uno de los enfoques se consiguen los siguientes resultados:

Atmósfera con ozono	Números de condicionamiento	
Sonda	Enfoque 1	Enfoque 2
REMS-MSL	1.577601e+019	5.723759e+018
METIS	1.083013e+029	4.237165e+025
SISDREAMS	8.799641e+008	1.466616e+008

Cuadro 8: Números de condicionamiento para las sondas

Sólo se ha aplicado a los datos de atmósfera con ozono debido a que en el resto de escenarios las matrices serían las mismas y por consiguiente, se obtendrían los mismos números de condicionamiento. En los tres casos mostrados, los números de condicionamiento son muy elevados y esto es debido a que las matrices están muy cerca de ser singulares (su determinante es muy próximo a 0) porque los rangos son consecutivos y hay sensores que recubren a otros (los sensores globales). Esto se estudia en más detalle en el siguiente apartado.

Interesa que el número de condicionamiento sea lo más próximo a uno posible ya que conseguiremos mejores resultados. En la tabla anterior, se observa que los números de condición del segundo enfoque están más próximos a uno que los del primer enfoque. Por ello, a partir de ahora se continuará trabajando con el segundo enfoque. Sin embargo, los números de condicionamiento son “catastróficos”. En cambio, en los resultados no supone un problema. Si se cambian los M_{ideal} , el resultado no cambia aparentemente (Observar Figura 22 y Figura 16, por ejemplo).

4.4. OBSERVACIONES

4.4.1. Elección de fotodiodos para METSIS

Para los dos enfoques estudiados anteriormente, siempre se han utilizado en la sonda METSIS los fotodiodos 1,2,4,6,7,8,9 y 11. Es decir, todos excepto el sensor 3, el 5 y el 10. A continuación se va a explicar el por qué de la elección de estos fotodiodos.

Al principio como es lógico, se comenzó intentando reconstruir el espectro de irradiancia solar del cuerpo negro con los 11 sensores. Las pruebas han sido realizadas para TOA (Top Of Atmosphere), que como vimos a lo largo de este capítulo se consiguió una muy buena aproximación del cuerpo negro. El resultado se puede ver en la Figura 23.

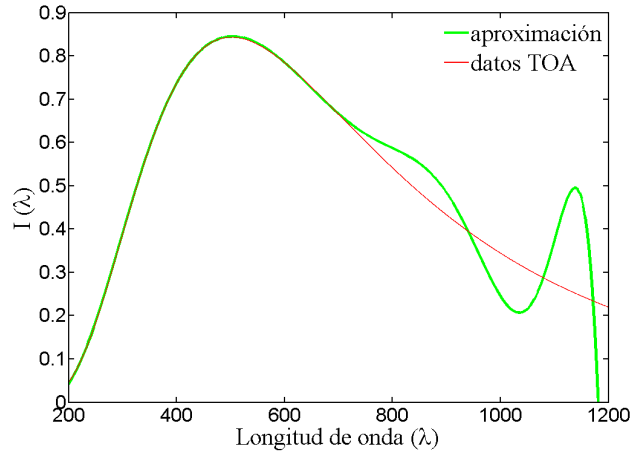


Figura 23: Top Of Atmosphere METSIS, Todos los sensores

El polinomio es de un grado muy alto (grado 10) y según crece λ , $I(\lambda)$ se hace muy oscilante. Nos interesa un polinomio de grado menor. Entonces, para conseguir buenas reconstrucciones necesitamos quitar alguno de los sensores.

Para saber que sensores quitar, hay que estudiar cuál de los rangos de longitudes de onda son cubiertos por otros sensores. En el Cuadro 2 se observa que el sensor 10 (245-290 nm) es cubierto por las longitudes de onda del sensor 4 (200-310 nm), el sensor 5 (300-345 nm) es cubierto entre el sensor 2 (315-400 nm) y el sensor 4, y el sensor 3 (280-315 nm) es cubierto por el sensor 4 de nuevo.

Estos tres sensores se encuentran en la radiación ultravioleta y tienen rangos muy pequeños de longitudes de onda. Por eso, podemos quitarlos obteniendo mejores resultados.

En la Figura 24 se han eliminado estos tres sensores y se puede apreciar como se consigue una reconstrucción excelente.

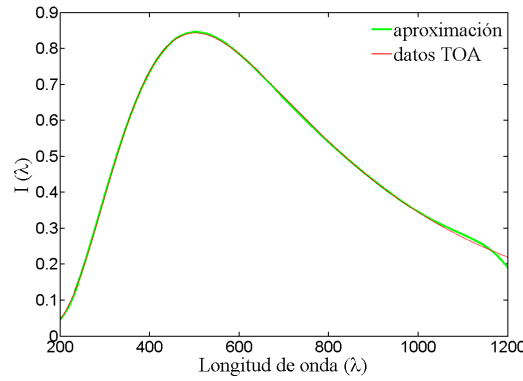


Figura 24: Top Of Atmosphere METSIS, Sensores 1,2,4,6,7,8,9,11

En la figura 25, se ha probado a quitar un sensor más (por ejemplo el fotodiodo 2) para ver qué es lo que ocurriría y observamos que no obtenemos un ajuste tan bueno como en la anterior imagen.

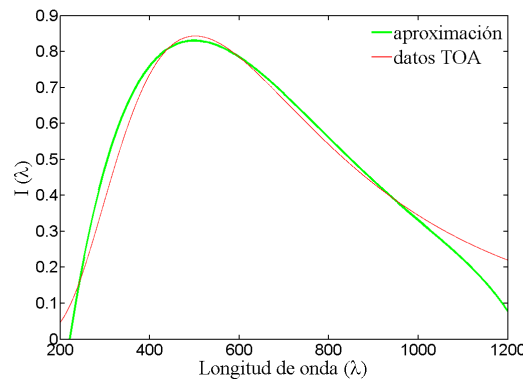


Figura 25: Top Of Atmosphere METSIS, Sensores 1,4,6,7,8,9,11

Por ello, se han utilizado imágenes METSIS con los sensores 1,2,4,6,7,8,9 y 11 en todas las pruebas. Se llegan a conseguir mejores aproximaciones del cuerpo negro.

4.4.2. Sensores ultravioleta para METSIS

Hasta este punto, se han conseguido reconstruir de forma brillante la radiación obtenida del cuerpo negro para la sonda REMS-MSL en todos los posibles casos y para la sonda METSIS, excepto en el escenario de atmósfera con polvo (Figura 16) y al principio y al final de las longitudes de onda representadas para atmósfera con ozono (Figura 15).

La sonda METSIS cuenta con cinco fotodiodos en el espectro electromagnético donde se encuentra la radiación ultravioleta, con lo cuál se podría obtener una buena aproximación en esa zona.

En la Figura 26, se ha representado la aproximación del cuerpo negro (utilizando el segundo enfoque) en los rangos del ultravioleta (200-400 nm) para METSIS en atmósfera con ozono.

Existe un gran ajuste del espectro entre los 300-400 nm, en cambio para el rango de longitudes de onda entre los 200-300nm no se ha podido aproximar lo suficientemente bien.

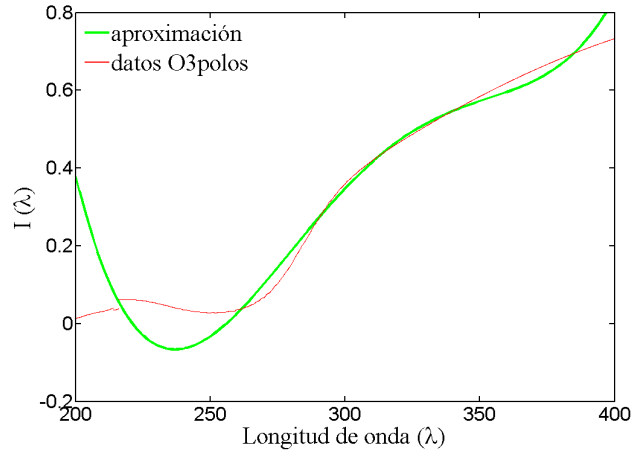


Figura 26: Atmósfera con ozono METSIS, Sensores 2,3,4,5,10

En la siguiente imagen (Figura 27), se muestra la reconstrucción del espectro de irradiancia solar del cuerpo negro en atmósfera con polvo para METSIS, al igual que el anterior, en la radiación ultravioleta (200-400 nm).

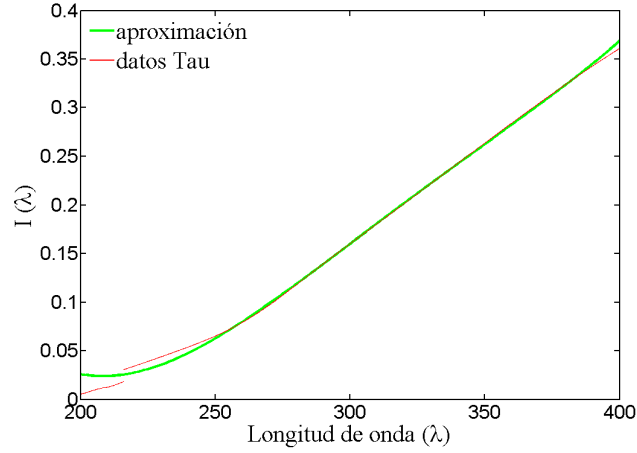


Figura 27: Atmósfera con polvo METSIS, Sensores 2,3,4,5,10

Se puede observar que obtenemos una muy buena aproximación en el rango de la radiación ultravioleta. Esto se debe a la cantidad de sensores en este intervalo. En cambio, como hemos visto en la Figura 16, a partir del rango del ultravioleta, necesitamos conseguir mejores aproximaciones.

4.5. TRAZADORES CÚBICOS NATURALES

En este trabajo, no es posible utilizar las condiciones de frontera sujeta debido a que dados un conjunto de puntos tabulados, no se puede conocer el valor de la derivada en los extremos. Pero sí que podemos utilizar condiciones de frontera libre o natural, por lo que en este capítulo se han hecho aproximaciones mediante interpolación de trazadores cúbicos naturales.

Para lograr aproximar mediante trazadores naturales se necesitan un conjunto de puntos. Para escoger estos puntos, podemos asignar al valor central de cada intervalo de longitud de onda para cada uno de los fotodiodos de cada sonda, el valor promedio.

El centro del intervalo de longitudes de onda para cada sensor se calcula de la siguiente manera:

$$C = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} \quad (4.1)$$

Entonces, el valor promedio será:

$$f(C) = \frac{M_{ideal}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \quad (4.2)$$

De esta forma, el rectángulo dado por la base del ancho del intervalo de longitudes de onda y la altura del valor promedio, está formado por un área igual al valor de la integral en ese intervalo (M_{ideal}).

Entre cada par de puntos (nodos) consecutivos se crea un trazador cúbico $S(x)$. Entonces, la nueva reconstrucción del espectro creada es un conjunto de polinomios consecutivos evaluados en cada uno de los subintervalos. Este procedimiento de aproximación es efectivo cuando tenemos puntos cercanos entre sí. Entonces, para la sonda SISDREAMS que sólo cuenta con tres sensores no es adecuado utilizar trazadores cúbicos.

Al implementar con la herramienta Matlab los trazadores cúbicos naturales, a continuación se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de dicho algoritmo para las diferentes sondas en cada uno de los escenarios que se tenían en un principio.

REMS cuenta con seis sensores que se encuentran en el rango de la radiación ultravioleta del espectro electromagnético (todos ellos están muy cercanos unos de otros) por lo que se obtendrán buenos resultados, como se puede apreciar en la Figura 28 (para atmósfera limpia). Se representan los puntos promedio mediante círculos en azul.

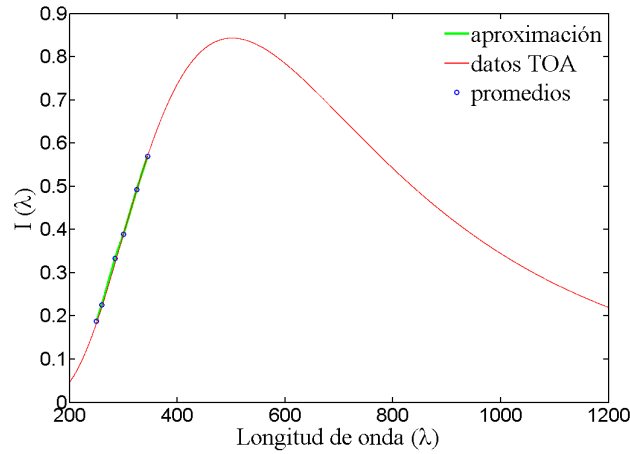


Figura 28: Top Of Atmosphere REMS, trazadores cúbicos naturales

En las dos siguientes imágenes (Figura 29 y Figura 30), se muestran las reconstrucciones del espectro de irradiancia solar del cuerpo negro en el caso de que la atmósfera cuente con partículas de ozono y polvo, respectivamente. El ajuste obtenido es bastante bueno, en cambio, se obtienen mejores resultados en los dos primeros enfoques.

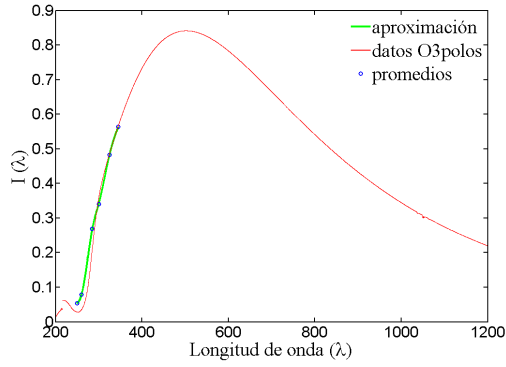


Figura 29: Atmósfera con ozono REMS, trazadores cúbicos naturales

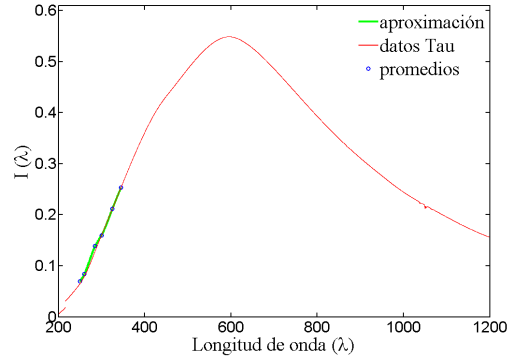


Figura 30: Atmósfera con polvo REMS, trazadores cúbicos naturales

En METSIS, que es la sonda que nos interesa para este procedimiento, para conseguir una buena aproximación tendremos que quitar dos sensores. La Figura 31 muestra la aproximación realizada con todos los sensores para la radiación recibida en la superficie con presencia de ozono.

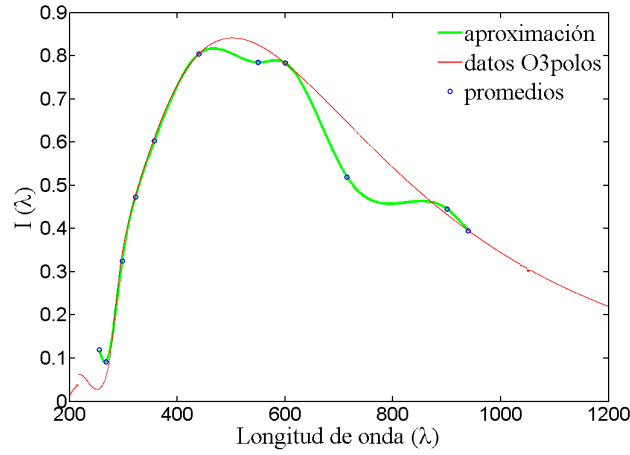


Figura 31: Atmósfera con ozono METSIS, trazadores cúbicos naturales

Se puede observar como hay dos sensores cuyos promedios se encuentran por debajo de la curva del cuerpo negro. Estos sensores corresponden al fotodiodo 1 y al fotodiodo 9. Al eliminarlos obtenemos el siguiente resultado en “Top Of Atmosphere” y para atmósfera con ozono en la superficie de Marte (Figura 32 y Figura 33).

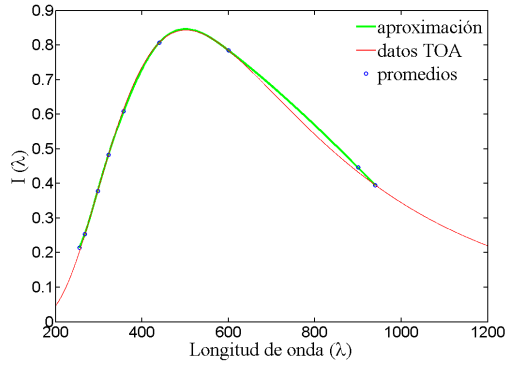


Figura 32: Atmósfera limpia METSIS, trazadores cúbicos naturales

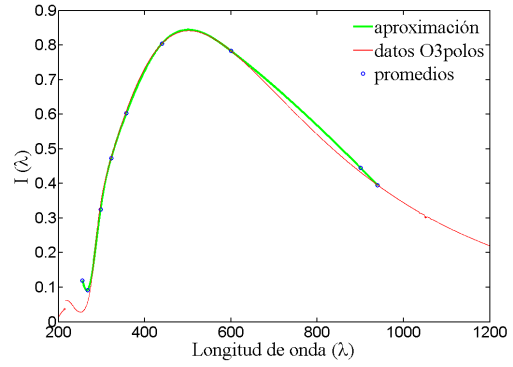


Figura 33: Atmósfera con ozono METSIS, trazadores cúbicos naturales

Se puede comprobar que en la Figura 33 se ha conseguido una mejor aproximación en el rango del ultravioleta con respecto a la Figura 21.

Ya sólo falta ver qué ocurre en el caso de atmósfera con polvo para METSIS que es el que peores resultados dio en procedimientos anteriores. La siguiente imagen muestra el resultado obtenido (Figura 34).

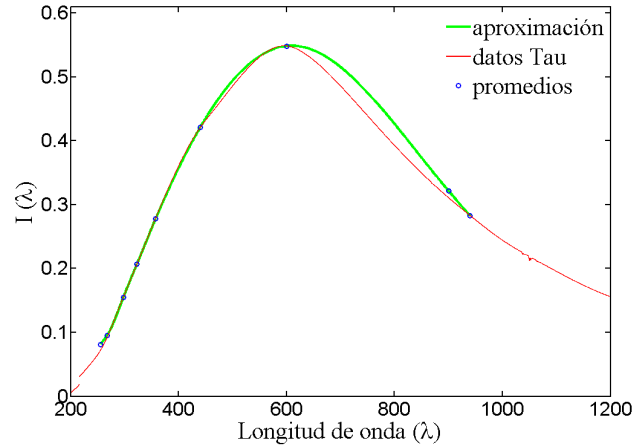


Figura 34: Atmósfera con polvo METSIS, splines cúbicos naturales

Se consigue una clara mejoría con respecto a la Figura 22 que era lo que se esperaba con el uso de trazadores cúbicos naturales, sobretodo en el rango ultravioleta.

En general, los resultados han sido bastante buenos, sobretodo para METSIS, ya que el uso de trazadores cúbicos es bastante efectivo si contamos con muchos sensores (un punto promedio por cada sensor).

Sin embargo, en la sonda SISDREAMS sólo se cuenta con tres fotodiodos. El ajuste por tanto, no será aceptable. Se puede comprobar en las siguientes imágenes:

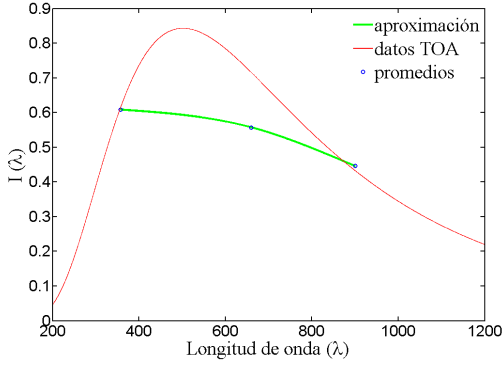


Figura 35: Top Of Atmosphere METSIS, splines cúbicos naturales

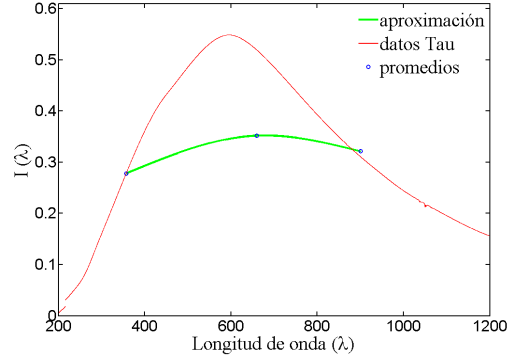


Figura 36: Atmósfera con ozono METSIS, splines cúbicos naturales

4.6. SENSOR VIRTUAL PARA SISDREAMS

En las siguientes imágenes se muestran los resultados de aplicar este procedimiento. En las diferentes gráficas se representan tanto la aproximación con el valor exacto, como con el valor obtenido en el caso de que la radiación obtenida en $\lambda = 200$ sea 0.

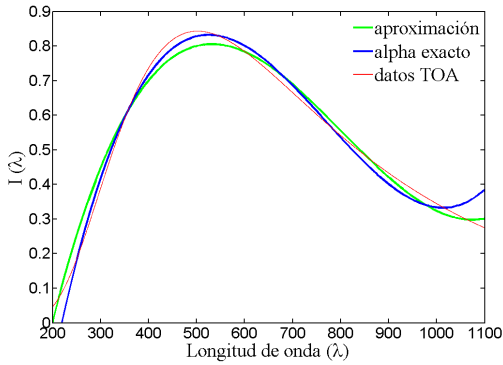


Figura 37: Top Of Atmosphere, Sensor Virtual

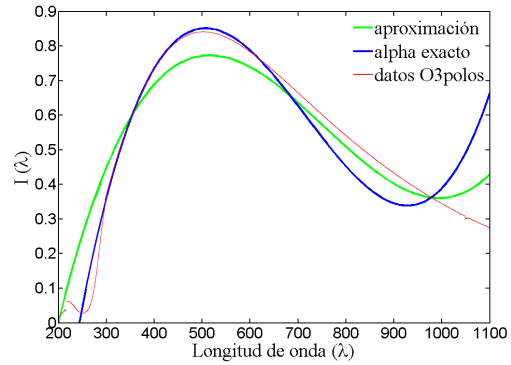


Figura 38: Atmósfera con ozono, Sensor Virtual

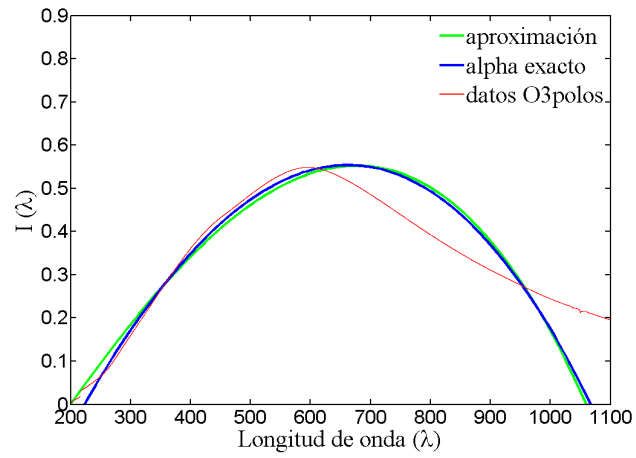


Figura 39: Atmósfera con polvo, Sensor Virtual

Se observa claramente una gran recuperación del espectro de irradiancia solar del cuerpo negro para la radiación recibida en TOA y bastante aceptable para la atmósfera con ozono. Sin embargo en la atmósfera con polvo, sólo se logra una buena reconstrucción del espectro en el rango 200-600nm, que es considerable.

5. CONTRASTE DE LOS MÉTODOS Y CONCLUSIONES

5.1. CONTRASTE DE LOS MÉTODOS

Con el primer y segundo enfoque, se ha conseguido una excelente recuperación del espectro de irradiancia solar del cuerpo negro para REMS-MSL, en la región del ultravioleta (Todos sus fotodiodos se encuentran en ese rango).

En el caso de la sonda METSIS, con estos mismos procedimientos, se obtienen muy buenos resultados para “Top Of Atmosphere” y para la radiación solar recibida en la superficie de Marte cuando existen partículas de ozono en la atmósfera.

La sonda SISDREAMS sólo cuenta con tres fotodiodos, por lo que sólo se puede aproximar el espectro del cuerpo negro por una parábola, no consiguiendo la reconstrucción esperada.

Para conseguir una mejor aproximación para la sonda METSIS, para la atmósfera cuando contiene partículas de polvo, se ha recurrido al uso de trazadores cúbicos naturales. Con este método de interpolación, los resultados son bastante decentes para las sondas que están formados por un número elevado de fotodiodos, es decir, para REMS y METSIS.

Con este procedimiento, tampoco se ha podido llegar a un buen ajuste del espectro de irradiancia solar del cuerpo negro para SISDREAMS, debido a su ausencia de fotodiodos. La única forma de obtener los resultados que necesitamos es, con un sensor virtual, consiguiendo buenas aproximaciones.

5.2. CONCLUSIONES

Se ha conseguido reconstruir el espectro de irradiancia solar del cuerpo negro con gran exactitud para la sonda REMS-MSL, que servirán para conocer las características de la atmósfera y las condiciones del Planeta.

Con respecto a las otras dos sondas, METSIS y SISDREAMS, que se enviarán en un futuro próximo al Planeta rojo, sabemos de forma aproximada que es lo que medirán “in situ” en “Top Of Atmosphere” así como en la superficie de Marte para atmósfera con partículas de polvo y ozono para unos datos estimados. Con METSIS, al estar formada por un gran número de sensores, se conseguirá con éxito la información deseada con respecto a las características de la atmósfera de Marte. En cambio, SISDREAMS, tiene limitaciones en su diseño y pocos sensores, por lo que se tendrán que seguir realizando estudios.

Referencias

- [1] Ver: http://www.unicrom.com/Tut_fotodiodo.asp
- [2] Ver: <http://es.wikipedia.org/wiki/Fotodiodo>
- [3] Ver: <http://msl-scicorner.jpl.nasa.gov/Instruments/REMS/>
- [4] Gómez-Elvira, C. Armiens, L. Castañer, M. Domínguez, M. Genzer, F. Gómez, R. Haberle, A.M. Harri, V. Jiménez, H. Kahanpää, L. Kowalski, A. Lepinette, J. Martín, J. Martínez-Frías, I. McEwan, L. Mora, J. Moreno, S. Navarro, M.A. de Pablo, V. Peinado, A. Peña, J. Polkko, M. Ramos, N.O. Renno, J. Ricart, M. Richardson, J. Rodríguez-Manfredi, J. Romeral, E. Sebastián, J. Serrano, M. de la Torre Juárez, J. Torres, F. Torrero, R. Urquí, L. Vázquez, T. Velasco, J. Verdasca, M.P. Zorzano, J. Martín-Torres, “REMS: The Environmental Sensor Suite for the Mars Science Laboratory Rover”, *Space Sci Rev* 170, 583-640 (2012).
- [5] Ver: <http://mars.jpl.nasa.gov/msl/>
- [6] I. Arruego, M. Díaz-Michelena, J.J. Jiménez, J. Martínez, V. Apéstigue, M. González-Guerrero, J. Azcue, A. Valverde, V. de Manuel, J. A. Domínguez, I. Martín, B. Martín, J. Álvarez, M. Álvarez, C. Hernando, M.F. Cerdán, C. Ruiz de Galarreta, J. Sánchez, G. Martínez, L. Vázquez, H. Guerrero, “Development of miniaturized instrumentation for Planetary Exploration and its application to the Mars MetNet Precursor Mission”, *Proceeding of the European Geosciences Union – 7th General Assembly, Vienna, Austria 02-07 May 2010. Geophysical Research Abstracts Vol. 12, EGU2010.*
<http://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2010/EGU2010-13330.pdf>
- [7] Ver: <http://metnet.fmi.fi>
- [8] F. Esposito, S. Debei, C. Bettanini, C. Molfese, I. Arruego Rodríguez, G. Colombatti, A.-M. Harri, F. Montmessin, C. Wilson, A. Aboudan, M. Zaccariotto, S. Abaki, G. Bellucci, J.-J. Berthelier, J.R. Brucato, S. B. Calcutt, F. Cortecchia, F. Cucciarre, G. Di Achille, F. Ferri, F. Forget, E. Friso, M. Genzer, P. Gilbert, J.-P. Goutail, H. Haukka, J.J. Jiménez, S. Jiménez, J.-L. Josset, O. Karatekin, G. Landis, R. Lorentz, L. Marthy, J. Martinez, V. Mennella, D. Mohlmann, E. Palomba, M. Patel, J.-P. Pommereau, C.I. Popa, S. Rafkin, P. Rannou, N.O. Renno, P. Schipani, W. Schmidt, E. Segato, F. Simoes, A. Spiga, F. Valero, L. Vázquez, F. Vivat, O. Witasse, S. Yahi, R. Mugnuolo, S. Pirrotta, “DREAMS for the ExoMars 2016 mission: a suite of sensors for the characterization of Martian environment”, *EPSC Abstracts Vol. 8, 2013.*
- [9] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, “Análisis numérico”.

- [10] Álvaro de Vicente-Retortillo Rubalcaba, “Método de estimación de la radiación solar atenuada por la atmósfera de Marte”. Máster en Geofísica y Meteorología, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas, 2013.

Este documento esta firmado por



Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Fri Jun 06 23:37:36 CEST 2014
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@fi.upm.es, CN=CA Facultad de Informatica, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
Numero de Serie	630
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)